ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV
3 Οκτωβρίου 2013

Θέμα 1. Υπολογίστε

(α′) το $\int_U f(x,y)d(x,y)$ με $U = [0,1] \times [0,1]$ και $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \neq x \sin \frac{1}{x}, \\ 0, & y = x \sin \frac{1}{x}, \end{cases}$

(β′) το $\int_V g(x,y)d(x,y)$ με $V = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : \ y \geq x^2, \ x \geq y^2\}$ και $g(x,y) = xy$,

(γ′) τον όγκο V του χωρίου που περικλείεται από τα παραβολοειδή $z = x^2 + y^2$ και $z = a - b(x^2 + y^2)$, $a, b > 0$,

(δ′) τον όγκο T του τετραέδρου που περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1 - x - y$,

(ε′) τη μάζα M ενός κυλινδρικού ποτηριού νερό ακτίνας r και ύψους h με n σφαιρικές φυσαλίδες αέρα ακτίνας ε και πυκνότητα μάζας αέρα $\rho = 0$ και νερού $\rho = 1$.
Υπόδειξη: Ένα χωρίο $U \subset \mathbb{R}^3$ πυκνότητας μάζας $\rho : U \to \mathbb{R}$ έχει μάζα $\int_U \rho(x,y,z)d(x,y,z)$.

Θέμα 2. (α′) Είναι το $\bar{f}(x,y) = \dfrac{(x,4y)}{x^2+4y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, πεδίο κλίσεων; Αν όχι, γιατί; Αν ναι, βρείτε μια αντιπαράγωγό του φ.

(β′) Σχεδιάστε την καμπύλη $\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} (t, 4(1-t)^2 - 1), & t \in [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2], \\ (t, 0), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}], \\ (4-t, 3), & t \in [2,4] \end{cases}$

και δείξτε ότι περικλείει ένα κανονικό χωρίο $B \subset \mathbb{R}^2$ ως προς τους άξονες των x και y.

(γ′) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για την $\bar{f}$ του (α’) και το B του (β’).

Θέμα 3. Έστω $B \subset \mathbb{R}^3$ η μοναδιαία μπάλα (κέντρου $\bar{0}$) και $\bar{f}$ η ταυτοτική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$.

(α′) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Gauss για τις B και $\bar{f}$ και υπολογίστε το εμβαδό της ∂B.

(β′) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Stokes για τις $\partial B \cap \{z \geq \frac{1}{2}\}$ και $\bar{f}$.

Θέμα 4. (α′) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς και $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n \to f$ ομοιόμορφα, και έστω $(x_n) \subset [0,1]$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

(β′) Έστω $f_n(x) := \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το κατά σημείο όριο $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ της (f_n) και δείξτε ότι η σύγκλιση $f_n \to f$ δεν είναι ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$, ενώ είναι ομοιόμορφη στα υποσύνολά του $\{x \in \mathbb{R} : \ |x| \leq q < 1\}$ και $\{x \in \mathbb{R} : \ |x| \geq \alpha > 1\}$.

(γ′) Αν $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(t) := f(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, ισοσυνεχής (δηλ. $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall \ t,s \in [0,1], \ |t-s| < \delta \ \forall \ n \in \mathbb{N} : \ |f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon$), τι μπορείτε να πείτε για την f;

Θέμα 5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η περιττή και 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & x \in (0,\pi], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(α′) Σχεδιάστε την $f|_{[-\pi,\pi]}$. Είναι η $f|_{[-\pi,\pi]}$ ομαλή κατά τμήματα και ολοκληρώσιμη; Γιατί;

(β′) Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f. Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

(γ′) Υπολογίστε το όριο της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! Σκεφτείτε πριν υπολογίσετε!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!